ANALYSE DE LA DÉFORMATION FINIE EN DEUX DIMENSIONS

DÉFORMATION HÉTÉROGÈNE

Bien souvent, les objets géologiques se déformeront de façon hétérogène, i.e. les conditions de la déformation homogène définies plus bas ne seront pas respectées. Dans l'exemple suivant, les droites de l'objet non-déformé ne sont plus des droites après déformation et les droites originellement parallèles dans l'objet non-déformé ne sont pas tout à fait parallèles les unes aux autres après déformation.

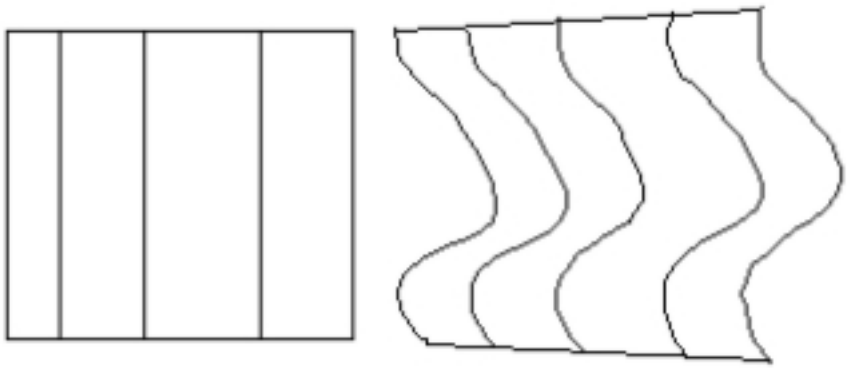


Figure 1: Déformation hétérogène d'un carré

LA DÉFORMATION HOMOGÈNE

Il existe plusieurs types de situations de déformation homogène soient la déformation pure plane, le cisaillement pur et le cisaillement simple. On dira qu'une déformation sera homogène, si les conditions énoncées ci-dessous sont respectées (voir p. 51 D&R). Pour tous les autres cas, on dira que la déformation sera hétérogène.

- Les droites de l'objet non-déformé demeurent des droites après déformation.

- Des lignes parallèles de l'objet non-déformé demeurent parallèles après déformation.

Pour les deux exemples de la figure 2, on peut dire que l'objet, ici le carré unitaire blanc, a subi une déformation homogène car les deux conditions énoncées précédemment sont respectées.

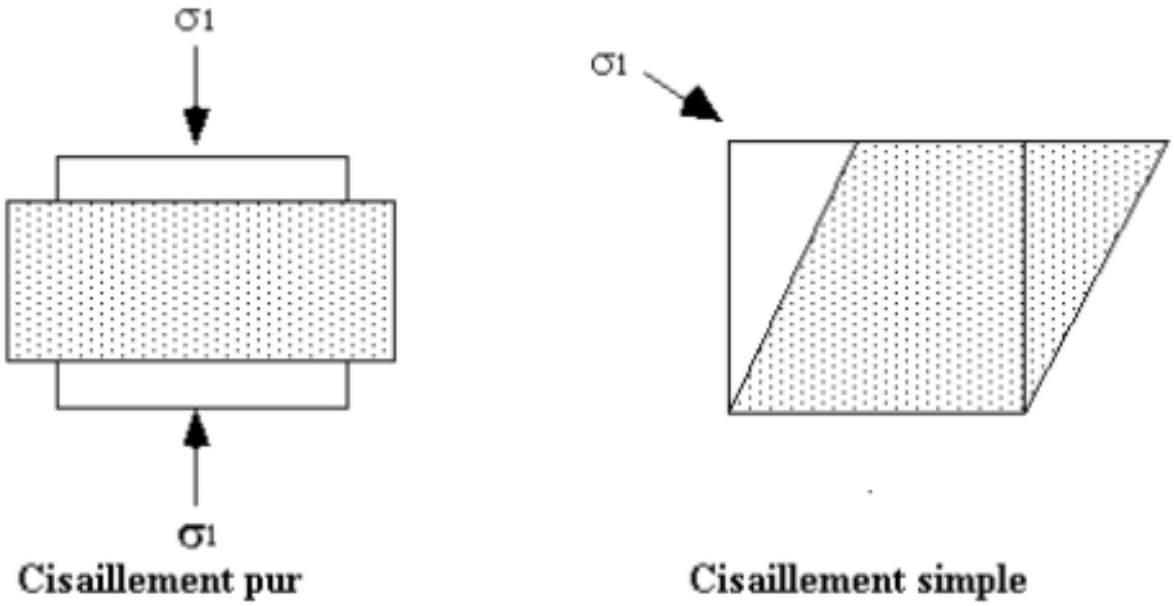


Figure 2: Déformation d'un carré par cisaillement pur et cisaillement simple

Le changement de forme et l'ellipse de déformation

La déformation finie est généralement représentée graphiquement par le changement de forme d'un cercle hypothétique de rayon unitaire ou d'un carré de dimension unitaire (fig. 3). Après une déformation homogène, le cercle prendra l'allure d'une ellipse (une sphère et un ellipsoïde si on travaille en 3D). L'axe long et l'axe court, soient les axes principaux de cette ellipse, correspondent aux axes principaux de la déformation.

Le cisaillement pur

Pour un **cisaillement pur progressif**, sous l'effet de la déformation, le carré initial devient un rectangle. Les axes principaux de la déformation, i.e. S_1 et S_3 de l'ellipse de la déformation, ne subissent aucune rotation d'un état de déformation à l'autre. On parle ainsi de *déformation non rotationnelle*. Dans ce cas, pour chacune des déformations infinitésimales, les axes principaux de la déformation auront la même orientation et on dira que l'accumulation de la déformation se sera faite de façon *coaxiale,* i.e. toujours selon le même axe (fig. 3). Un cas particulier de déformation par cisaillement pur est la **déformation pure plane,** où l'axe intermédiaire de la déformation S_2 reste inchangée d'un état de déformation à l'autre (S_2 =1).

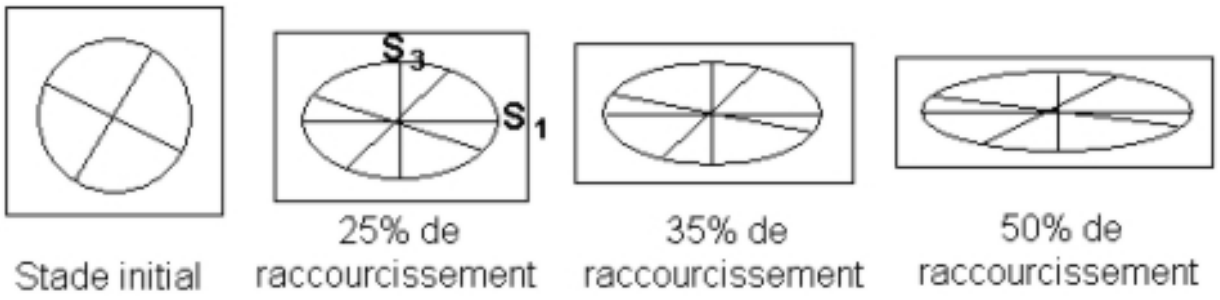


Figure 3: Déformation progressive d'un carré et d'un cercle par cisaillement pur.

Le cisaillement simple

Pour une déformation en **cisaillement simple**, le carré initial se déforme en un parallélogramme dont les côtés s'allongent progressivement pour une déformation croissante mais dont les surfaces inférieures et supérieures ne se déforment pas, bien que la surface supérieure change de position dans l'espace. L'accumulation de la déformation se fait de façon *non coaxiale* car les axes principaux de la déformation changent d'orientation d'un état de déformation à l'autre (fig. 4). Aussi, deux droites originalement perpendiculaires avant la déformation, ne resteront pas perpendiculaires dans l'état déformé. On dira alors que la déformation est *rotationnelle*.

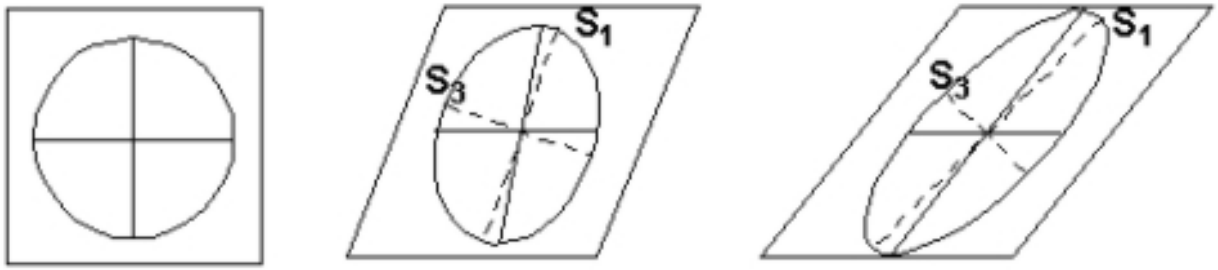


Figure 4: Déformation progressive d'un carré et d'un cercle par cisaillement simple.

Lignes sans déformation finie

Lorsqu'on superpose l'état initial d'un cercle non déformé à son état final déformé, soit l'ellipse de la déformation, il est possible de tracer deux lignes de longueur unitaire (où l_f et $l_i = 1$) passant par le centre du cercle et de l'ellipse. Ces lignes correspondent à des lignes sans déformation finie qui ne subissent pas d'allongement ni de raccourcissement. Ces lignes séparent deux champs de déformation de l'ellipse soit le champ de raccourcissement et le champ d'allongement (fig. 5).

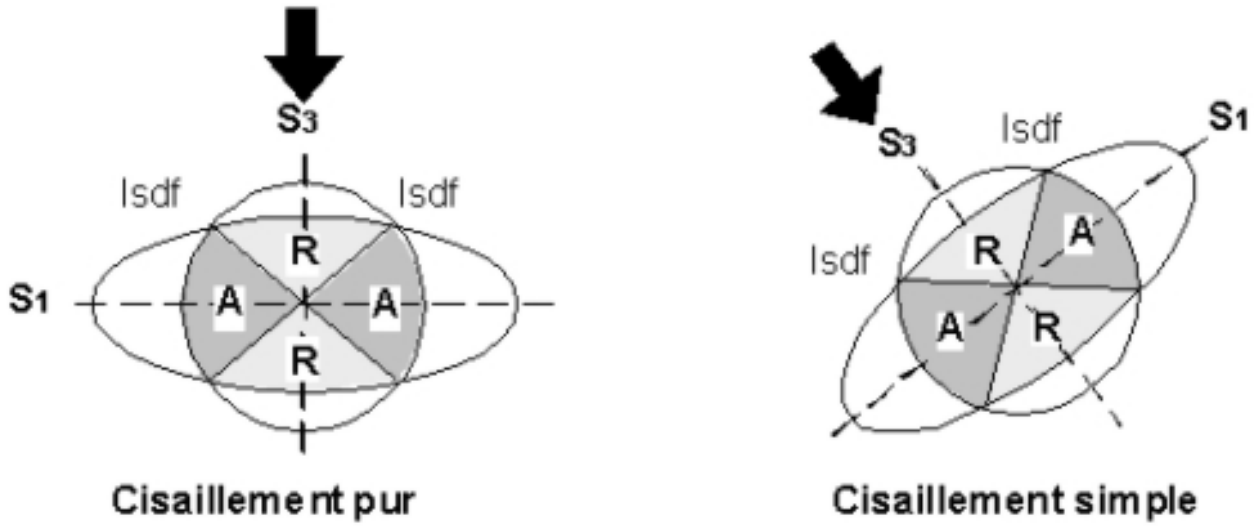


Figure 4: Champ de raccourcissement et d'allongement de l'ellipse de la déformation.

QUANTIFICATION DE LA DÉFORMATION

La déformation linéaire

Plusieurs paramètres peuvent caractériser la déformation linéaire d'un objet déformé dans un régime de cisaillement pur ou de cisaillement simple. Ces paramètres comparent la dimension d'une droite contenue dans un objet déformé de l'état initial l_i à l'état déformé final l_f.

- L'allongement relatif ou extension : $e = dl/l = (l_f - l_i)/l_i$
  (extension ou engineer's extension)
- L'étirement : $S = l_f / l_i = 1 + e$
  (stretch)
- L'élongation quadratique : $\lambda = (1 + e)^2$
  (Quadratic extension) aussi $= [(l_i/l_i) + (l_f - l_i)/l_i]^2 = (l_f / l_i)^2$

Le rapport entre les axes maximum et minimum nous donne un autre indice du taux de déformation, appelé "ellipticité", référant à la forme plus ou moins elliptique du cercle initial déformé.

- L'ellipticité: $R = (1 + e_1)/(1 + e_3)$

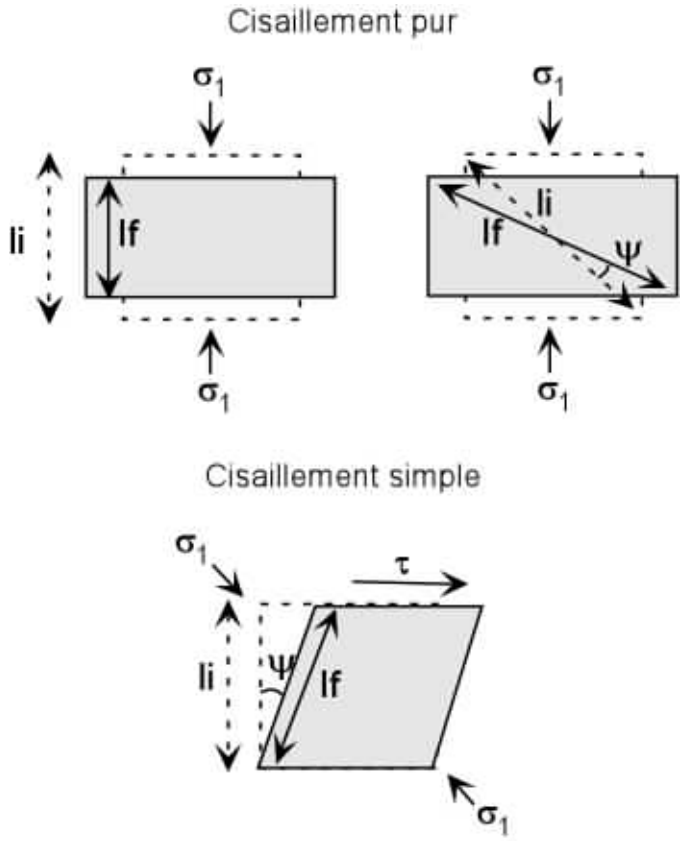


Figure 5: Paramètres de la déformation en cisaillement pur et par cisaillement simple.

La déformation angulaire

Ici on s'intéresse au changement d'orientation d'une droite contenu dans un objet déformé. La déformation angulaire d'objets géologiques se produit uniquement pour un régime en cisaillement simple. Ce changement d'orientation est mesuré par la déviation angulaire d'une droite de son état initial à son état déformé final. Deux paramètres caractérisent la déformation angulaire, soit le cisaillement angulaire ψ et la déformation cisaillante $\gamma = tg\psi$.

EXERCICES PRATIQUES - LA THÉORIE DE LA DÉFORMATION

Pour effectuer les exercices suivants, utilisez une boîte de déformation disponible au local 4505. Cette boîte de déformation contient un paquet de cartes, une série de biseaux en bois taillés à angle fixe (30°, 45°, et 60°) et des biseaux de forme irrégulière. Un carré de dimension unitaire (7 cm), un cercle de rayon unitaire qui touche le carré en quatre points tangents (rayon de 3,5 cm) et des lignes de différentes orientations sont tracés sur le paquet de cartes. Les exercices qui suivent vous aideront à assimiler certaines notions de la théorie de la déformation. Vous pourrez imposer une déformation au paquet de carte à l'aide des différents biseaux.

EXERCICE 1 - La déformation homogène

Utilisez les biseaux à 45° et imposez un cisaillement simple au paquet de cartes. Le carré devient alors un parallélogramme. Calquez le carré initial et le parallélogramme résultant de la déformation sur une feuille de papier en superposant la base des deux formes géométriques (le carré et le parallélogramme).



Figure 1: Schéma de l'exercice 1

1- Y a-t-il eu déformation du carré? Y a-t-il eu distorsion et/ou dilatation? Comment pouvez-vous prouver que le carré a été déformé? Comparez les surfaces du carré et du parallélogramme.

2- Y a-t-il eu des changements de forme, de longueur de certaines lignes ou d'angle entre deux lignes?

3- Peut-on quantifier la déformation? Si oui, de quelle(s) façon(s) et quels sont les résultats obtenus?

4- S'agit-il d'une déformation homogène ou hétérogène? D'une déformation par cisaillement pur ou par cisaillement simple? Justifiez votre réponse.

EXERCICE 2 - La déformation hétérogène

Replacez maintenant le paquet de cartes à son état initial non déformé pour retrouver le carré initial de dimension unitaire. Servez vous maintenant des biseaux de forme irrégulière et déformez à nouveau le paquet de cartes.



Figure 2: Schéma de l'exercice 2

1- Décrivez la forme du carré initial dans son état déformé?

2- Y a-t-il eu des changements de forme, de longueur de certaines lignes ou d'angle entre deux lignes perpendiculaires de l'état initial à l'état déformé?

3- Peut-on quantifier la déformation? Comment?

4- Quantifiez la déformation linéaire en mesurant deux lignes parallèles entre elles. Choisissez des lignes verticales et horizontales (les côtés du carré) ainsi que des lignes obliques, parallèles à la diagonale du carré initial que vous aurez tracé sur les cartes dans leur état initial (non déformé).

5- Quantifiez la déformation angulaire pour une ligne horizontale, une ligne verticale et une ligne oblique. Qu'est-ce qu'on obtient?

EXERCICE 3 - L'ellipse de la déformation

Replacez le paquet de carte dans son état initial non déformé. Utilisez maintenant les biseaux à 30° et imposez un cisaillement simple au paquet de cartes. Le cercle devient alors une ellipse. Calquez cette ellipse sur une feuille de papier et inscrivez-y les axes principaux de la déformation (axe long et axe court) en plus d'une ligne horizontale passant par le centre de l'ellipse, tel qu'illustré ci-dessous à la figure 3. Refaites le même exercice en vous servant des biseaux à 45° et 60° de façon à obtenir des ellipses de forme différente que vous superposerez sur la feuille de papier.

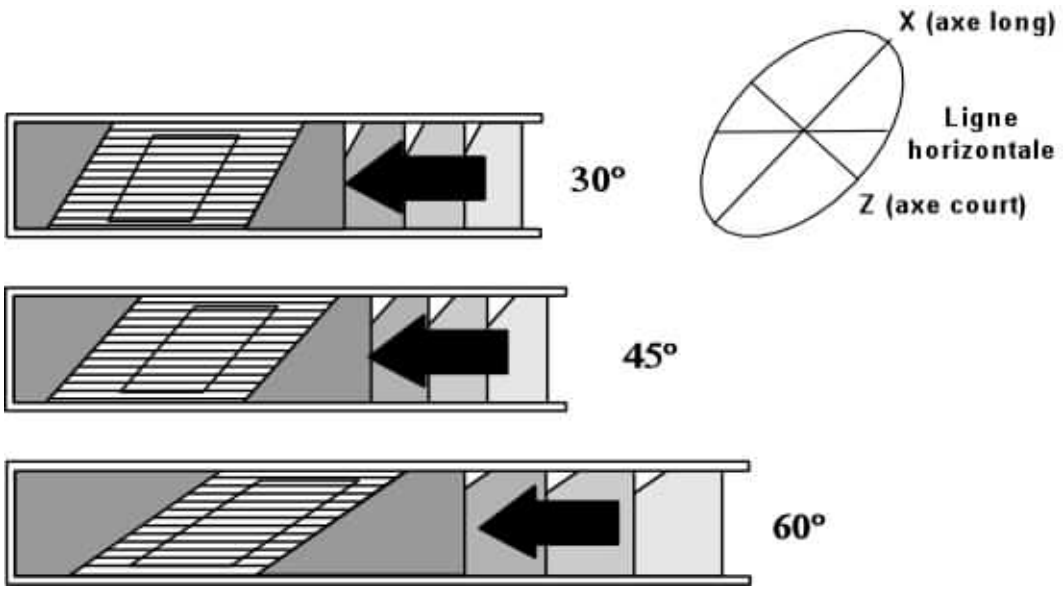


Figure 3: Schéma de l'exercice 3

1- Quelle est la relation entre l'axe long et l'axe court des ellipses dans chacun des cas?

2- Peut-on quantifier la déformation à chaque stade de la déformation progressive, i.e. pour chacune des ellipses produites? De quelle(s) façon(s)? Calculez la déformation linéaire en mesurant la longueur des axes long et court des ellipses (e et S). Calculez l'ellipticité R.

3- Y a-t-il eu dilatation? Faites-en la preuve (surface d'un cercle = πr^2 et surface d'une ellipse = πXZ).

4- Évaluez la déformation angulaire en calculant le cisaillement angulaire ψ et la déformation cisaillante $\gamma = tg\psi$ pour chaque stade de la déformation progressive.

5- Peut-on trouver une direction selon laquelle la longueur des lignes demeure inchangée d'un stade de déformation à l'autre? Pour vous aider, superposez le cercle initial aux ellipses de la déformation. Ces directions correspondent aux lignes sans déformation finie (lsdf).

6- Qu'ont de particulier les domaines situés de part et d'autre de ces lsdf? Comment se comporterait un objet géologique, une veine de quartz par exemple, si lors d'un épisode de déformation il se situait dans le champ de raccourcissement de l'ellipse de la déformation? Et s'il se situait dans le champ d'allongement de l'ellipse de la déformation?

EXERCICE 4 - La déformation progressive

En déformant successivement le paquet de cartes avec les biseaux de 30°,45° et 60°, vous lui avez imposer une déformation progressive, c'est-à-dire une déformation continue et étalée sur un certain laps de temps. Le paquet de cartes c'est ainsi vu déformer de plus en plus. En observant les ellipses produites au différents stades de la déformation à l'autre de plus en plus, commentez la variation des paramètres de la déformation linaire et angulaire avec l'augmentation de la déformation.

La déformation linéaire.

Faites un graphique de la variation de l'ellipticité (S_1 sur S_3) avec l'augmentation de la déformation. Expliquez.

Quelle est la relation entre la déformation linéaire (S_1) et la déformation cisaillante (γ)? Faites un graphique de S_1 vs la déformation cisaillante. Commentez.

L'orientation des axes long et court de l'ellipse.

Faites un graphique de l'angle entre l'axe long et le plan de cisaillement (ligne horizontale) vs la déformation cisaillante. Expliquez.

Quelle serait la valeur de la déformation cisaillante pour un stade de déformation intense, i.e. une ellipse quasi parallèle au plan de cisaillement?

L'orientation des lsdf.

Faites un graphique de l'angle aigu entre les lignes sans déformation finies (lsdf) et S_1 vs la déformation cisaillante. Commentez.

Après période d'exercices ou de travaux pratiques, demandez vous quel était le but de l'exercice et quelles notions théoriques ont été abordées pendant l'exercice?

PAR EXEMPLE, POUR L'ENSEMBLE DES EXERCICES PRÉCÉDENTS

1- Quel est le but du travail?

Aider à la compréhension de la théorie de la déformation.

2- Quelles sont les notions théoriques qui ont été abordées?

La déformation homogène vs hétérogène.

La distortion et la dilatation.

Le cisaillement pur.

Le cisaillement simple.

Les composantes de la déformation sont la déformation linéaire et angulaire.

Comment quantifier la déformation, à l'aide des paramètres e, S, λ, R, ψ et γ.

La déformation progressive en plusieurs stades.

Les lignes sans déformation finie et les champs d'allongement et de raccourcissement.